数理解析研究所講究録
第 1739 巻 2011 年 234-244

村瀬義益とニュートンの漸化式より得られる一般漸化式

Dedicated to Dr. Tamotsu Tsuchikura in celebration of his 88th birthday

新潟産業大学　堀口　俊二(Shunji Horiguchi)

Niigata Sangyo University

0. Contents

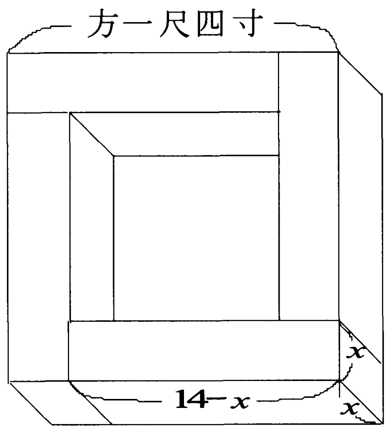
1．村瀬義益の炉縁の 3 次方程式の 3 つの解法

和算にはニュートン法の拡張と見られる研究があり，これより方程式の解を近似するための多数の漸化式が得られる．村瀬義益(1630 頃-1710 頃，新潟佐渡・東京・千葉)の『算法勿憚改』(1673)に，「炉縁の体積を 192 立方寸とするとき，一辺が 1 尺 4 寸(＝14 寸)のとき，太さを求めよ」という問題がある．右下図．

太さを x とおく．縦 x，横 $14-x$，高さ x の直方体を 4 個組み合わせると炉縁になる．この体積が 192 であるから，次の 3 次方程式となる．

$$4x^2(14-x)=192 \qquad (1.1)$$

$$f(x)=x^3-14x^2+48=0 \qquad (1.2)$$



炉　縁

これは 3 つの実数解 $x=2,\ 6\pm2\sqrt{15}$ をもつ．
村瀬は(1.1)から 2 つの漸化式を考えた：

第1法　$$x_{n+1}^2=\frac{48+x_n^3}{14}\ (n=0,1,2,\cdots) \qquad (1.3)$$

村瀬は $x_0=0$(初期値)，$x_1=1.85$，$x_2=1.97$，$x_3=1.9936$ まで計算し，解を 2 としている．

第 2 法　$$x_{n+1}^2=\frac{48}{14-x_n}\ (n=0,1,2,\cdots) \qquad (1.4)$$

ここでは $x_0=0$，$x_1=1.85$，$x_2=1.976$，$x_3=1.9989$，$x_4=1.9999907$ まで計算し，解を 2 とし

ている．漸化式(1.3)より(1.4)の方が精度が良くなっている．

村瀬は，関孝和(1640 頃-1708)の『題術弁議』(1685)にある逐次近似法より前にこれらを考案した．

第 3 法は長年未解読であったが，2009 年 6 月初旬に藤井康生(関孝和数学研究所)が解読に成功する．それは次式である．

第 3 法
$$48-x^3=(14-2x)x^2 \tag{1.5}$$

村瀬は方程式(1.5)で解(根) 2 の確かめをしているようである．これより次の漸化式が得られる．

$$x_{n+1}^2=\frac{48-x_n^3}{14-2x_n}(n=0,1,2,\cdots) \tag{1.6}$$

村瀬の漸化式は x^2 を求める 2 次元の漸化式であり，(1.3),(1.4),(1.6)の右辺の x_n を x にすると，それぞれ 3 次関数，双曲線，有理関数の異なるタイプである．

2．村瀬義益・ニュートン型の第 1 拡張漸化式(土倉・堀口(TH)法)

村瀬の漸化式(1.3),(1.4),(1.6)を拡張する．方程式(1.2)を

$$\begin{aligned} x^3-mx^3+48&=14x^2-mx^3 \\ &=x^2(14-mx) \end{aligned} \tag{2.1}$$

と変形すると，$14-mx\neq 0$ の範囲で次の命題の漸化式を得る．

命題 2.1
$$x_{n+1}^2=\frac{48-(m-1)x_n^3}{14-mx_n}(m\in \boldsymbol{R},\ n=0,1,2,\cdots) \tag{2.2}$$

これを**村瀬の炉縁の拡張漸化式**という．

定義 2.2 方程式 $f(x)=0$ の根 α の近似値を求める漸化式(反復式)

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(n=0,1,2,\cdots) \tag{2.3}$$

を**ニュートン**(1669 年頃発見)・**ラフソン**(1690 年頃発見)**法**という．単に**ニュートン法**あるいは**ニュートンの漸化式(反復式)**ともいう．ただし，根 α の近傍で $f'(x_n)\neq 0$ とする．

定義 2.3 $f(x)=x^p+a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\cdots+a_{p-1}x+a_p$ とする．$f(x)$の q 次導関数の最高次数の項は $p(p-1)(p-2)\cdots(p-(q-1))x^{p-q}$ である．この係数を実数 $m(\neq 0)$に置換えると mx^{p-q} となる．このように置換えた $f^{(q)}(x)$ を $f^{(q)}(x),_m$ と表す．さらに $m=\alpha$ としたとき $f^{(q)}(x),_{m=\alpha}$ と表す．とくに $m=p(p-1)(p-2)\cdots(p-(q-1))$ のときは今まで通り単に $f^{(q)}(x)$ と表す．

今後，漸化式において $f^{(q)}(x),_m$ と $f^{(q)}(x)$ を使い分ける．特に $f(x)$ が初等関数を含む場合は $f^{(q)}(x)$ を用いる．

例 2.4 炉縁の方程式

$$f(x)=x^3-14x^2+48=0 \tag{2.4}$$

を漸化式

$$x_{n+1,m}^2=x_n^2-2x_n\frac{f(x_n)}{f'(x_n),m} \tag{2.5}$$

に適用する.

$$x_n^2-2x_n\frac{x_n^3-14x_n^2+48}{mx_n^2-28x_n}=\frac{(m-2)x_n^3-96}{mx_n-28} \tag{2.6}$$

$$=\frac{(m/2-1)x_n^3-48}{(m/2)x_n-14} \tag{2.7}$$

となる. ここで $m/2=m'$ とおくと漸化式(2.7)は命題 2.1 の村瀬の炉縁の拡張漸化式(2.2)になる.

漸化式(2.5)を一般化するとつぎの定理の漸化式を得る.

定理 2.5

$$x_{n+1}^q=x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.8}$$

ここで, q は 0 でない整数, 根 α の近傍で $f'(x_n)\neq 0$ とする.

証 明 $f(x)$ において

$$x^q=t\ ,\ g(t)=f(t^{1/q}) \tag{2.9}$$

と変換すれば, ニュートン法は(2.10), (2.11)となる.

$$t_{n+1}=t_n-\frac{g(t_n)}{g'(t_n)} \tag{2.10}$$

$$=t_n-\frac{f(t_n^{1/q})}{f'(t_n^{1/q})\,{}^1\!/_q\,t_n^{1/q-1}} \tag{2.11}$$

ここで $t_n=x_n^q$ とおくと漸化式(2.8)を得る. □

定義 2.6 漸化式(2.8)を**村瀬義益・ニュートン型の第 1 拡張漸化式** あるいは**土倉・堀口**(*TH*)**法**という.

TH 法は次のようにしても得られる. すなわちニュートン法

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

の両辺を q 乗して右辺を 2 項展開する. これの (初項+第 2 項) が *TH* 法となる.

3. 村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式

以下の § において漸化式の分母の $f(x)$ の q 次導関数 $f^{(q)}(x_n)$ は根 α の近傍で $f^{(q)}(x_n)\neq 0$ とする.

k は 0 でない実数定数とする. 方程式 $f(x)=0$ は

$$x^q f^{(q)}(x)=x^q f^{(q)}(x)-kf(x) \tag{3.1}$$

と変形され, これより次の漸化式を得る.

命題 3.1

$$x_{n+1}^q=x_n^q-k\frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)}\ (q\geq 1, k \text{ は 0 でない実数定数}) \tag{3.2}$$

例　3.2　漸化式(3.2)において，k=1，q=2，$f^{(2)}(x_n)=f^{(2)}(x_n)_{,m}$，$f(x)$を炉縁の方程式(1.2)の$f(x)=x^3-14x^2+48$としても村瀬の炉縁の拡張漸化式(2.2)を得られない．しかし $q=k=1$ のときニュートン法となる．

$q=k=2$ とすると(3.3)になる．これに炉縁の方程式を適用すると(3.6)になる．ここで$m/2=m'$とおくと(3.6)は命題 2.1 の村瀬の炉縁の拡張漸化式(2.2)になる．

$$x_{n+1}^2=x_n^2-2\frac{f(x_n)}{f''(x_n)_{,m}} \tag{3.3}$$

$$=x_n^2-2\frac{x_n^3-14x_n^2+48}{mx_n-28} \tag{3.4}$$

$$=\frac{(m-2)x_n^3-96}{mx_n-28} \tag{3.5}$$

$$=\frac{(m/2-1)x_n^3-48}{(m/2)x_n-14} \tag{3.6}$$

この例より漸化式(3.2)を次のように定義する．

定義　3.3　漸化式(3.2)を**村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式**という．とくにk=1 のとき**ニュートン型の拡張漸化式**，$k=2$ のとき**村瀬型の拡張漸化式**という．

命題 3.4　ニュートン型の拡張漸化式を${}^N x_{n+1}^q$，村瀬型の拡張漸化式を${}^M x_{n+1}^q$ と表す．このとき次の関係式を得る．

$${}^N x_{n+1}^q={}^M x_{n+1}^q+\frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)} \tag{3.7}$$

4．村瀬義益・ニュートン型の第 3 拡張漸化式

定義　4.1

$$x_{n+1}=x_n-k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(k=2,3,\cdots) \tag{4.1}$$

を**シュレーダー法**(1870)という．

村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式(3.2)において，$q=1$，$k=2, 3, \cdots$とするとシュレーダー法になる．すなわち(3.2)はシュレーダー法の拡張である．

ニュートン法を${}^N x_{n+1}$，シュレーダー法を${}^S x_{n+1}$と表すと

$$\frac{1}{k}({}^S x_{n+1}-x_n)+x_n={}^N x_{n+1} \tag{4.2}$$

となる．(4.2)を式変形して次の命題の関係式を得る．

命題　4.2

$$\frac{1}{k}{}^S x_{n+1}+\frac{k-1}{k}x_n={}^N x_{n+1} \tag{4.3}$$

関係式(4.3)は線分 ${}^S x_{n+1}\,x_n$を $(k-1)/k:1/k$ に内分する点が${}^N x_{n+1}$であるという面白い公式である(三重大学 新田貴士教授による指摘)．

シュレーダー法を 2 項展開して（初項＋第 2 項）を選ぶと次の漸化式を得る．

命題　4.3

$$x_{n+1}^q=x_n^q-q\,x_n^{q-1}k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\;(q=1,2,\cdots,\;k(\neq 0)\in \boldsymbol{R}) \tag{4.4}$$

定義 4.4 漸化式(4.4)を**村瀬義益・ニュートン型の第 3 拡張漸化式**あるいは**シュレーダー型の拡張漸化式**という.

注意 4.5 シュレーダー型の拡張漸化式は $k=1$ のとき土倉・堀口法となる. しかしシュレーダー型の拡張漸化式から村瀬型とニュートン型の拡張漸化式は得られない.

5. 村瀬義益・ニュートンの一般漸化式

村瀬義益・ニュートン型の第 1～第 3 拡張漸化式を一般化する.

定義 5.1 方程式 $f(x)=0$ に対して次式を**村瀬義益・ニュートンの一般漸化式**という.

$$x_{n+1}^q = x_n^q - \lambda x_n^r \frac{f(x_n)}{f^{(i)}(x_n)} \ (\lambda \neq 0, \lambda \in \boldsymbol{R}) \tag{5.1}$$

漸化式 (5.1) は q, λ, r, i により以下のように switch する.

A. $\lambda = q$(0でない整数), $r = q-1$, $i=1$ のとき **村瀬・ニュートン型の第 1 拡張漸化式**あるいは**土倉・堀口 (*TH*) 法**という.

B. $r=0$, λ は 0 でない実数, $i=q$(1 以上の整数) のとき**村瀬・ニュートン型の第 2 拡張漸化式**という. 特に
$\lambda=1$ のとき**ニュートン型の拡張漸化式**という. $\lambda=2$ のとき**村瀬型の拡張漸化式**という.

C. $\lambda = qk$(q は 0 でない整数, k は 0 でない実数), $r=q-1$, $i=1$ のとき, **村瀬・ニュートン型の第 3 拡張漸化式**あるいは**シュレーダー型の拡張漸化式**という.

6. 村瀬義益・ニュートン型の第 1～第 3 拡張漸化式の関連

§6,7 において必要に応じて $f(x)$は $C^i(i \geq 1)$ 級とする.

定義 6.1 集合 $D \subseteq \boldsymbol{R}$で定義された関数 $g(x): D \to D$ に対して

(1) $\alpha = g(\alpha)$ を満たすとき α を $g(x)$ の**不動点**という.

(2) $g(x)$ がある定数 L に対して
$$|g(x) - g(y)| \leq L|x-y| \ (x, y \in D) \tag{6.1}$$
のとき **Lipschitz 連続**, さらに $0 \leq L < 1$ のとき**縮小写像**とよばれる.

定義 6.2 十分大きい nと定数 $M(>0)$に対して

(1)
$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M|x_n - \alpha| \ (0 < M < 1) \tag{6.2}$$
のとき, 数列 $\{x_n\}$ は α に **1次収束する**といい, M を**収束率**という.

(2) 収束する数列 $\{x_n^q\}$ に対して
$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M|x_n - \alpha|^p \ (q \geq 1, \ p \geq 2) \tag{6.3}$$
のとき, 数列 $\{x_n^q\}$ は α^q に **p 次収束する**という.

次の縮小写像の原理は，漸化式が収束するための十分条件を与える．

定理 6.3（縮小写像の原理） 閉集合$D \subseteq \mathbf{R}$で定義された関数 $g(x): D \to D$ が縮小写像

$$|g(x)-g(y)| \leq L|x-y| \quad (0 \leq L < 1,\ L: \text{収縮率}) \tag{6.4}$$

なら，$g(x)$ の不動点 α が D 内に唯一存在し，任意の初期値 x_0 に対し反復

$$x_{n+1}=g(x_n) \tag{6.5}$$

は α に収縮率 L で 1 次収束する．

定理 6.4

$$g(x)=\left(x^q - q\,x^{q-1}\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.6}$$

は $f(x)=0$ の根 α の近傍で縮小写像である．さらに，$g(\alpha)=\alpha$ であるから，α は $g(x)$ の不動点である．したがって漸化式

$$x_{n+1}=\left(x_n^q - q\,x_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.7}$$

は α に 1 次収束する．

証　明

$$g'(x)=\frac{1}{q}\left(x^q - q\,x^{q-1}\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^{\frac{1}{q}-1}\left(\begin{aligned} &qx^{q-1} - q(q-1)x^{q-2}\frac{f(x)}{f'(x)} \\ &\qquad -q\,x^{q-1}\frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\end{aligned}\right) \tag{6.8}$$

$$\therefore \quad g'(\alpha)=\frac{1}{q}\left(\alpha^q\right)^{\frac{1}{q}-1}\left(q\alpha^{q-1} - q\alpha^{q-1}\frac{(f'(x))^2}{(f'(x))^2}\right)=0 \tag{6.9}$$

仮定より $f(x)$は C^i 級であるから $g'(x)$ は連続となるので，$x=\alpha$ の近傍で $|g'(x)|<1$ となる．したがって $g(x)$ は縮小写像となる．しかも $g(\alpha)=\alpha$ であるから α は $g(x)$ の不動点である．したがって縮小写像の原理により漸化式(6.7)は α に 1 次収束する．　□

注意 6.5 TH 法(2.8)の q 乗根は q が偶数のとき

$$g(x)=\pm\left(x^q - q\,x^{q-1}\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.6$'$}$$

となる．ここでは q が奇数の場合と統一して－(マイナス)の方は省略する．

定理 6.6 方程式 $f(x)=0$ の根を α とする．関数

$$g(x)=x^q - k\frac{f(x)}{f^{(q)}(x)} \quad (k \neq 0) \tag{6.10}$$

はC^i 級とする．このとき

$$qx^{q-1}=k\frac{f'(x)}{f^{(q)}(x)} \tag{6.11}$$

が成り立てば，$g(x)$ は α の近傍で縮小写像になり，村瀬・ニュートン型の第 2 拡張漸化式

$$x_{n+1}^{q}=x_n^q-k\frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)}\ (q\geq 1) \tag{6.12}$$

は村瀬・ニュートン型の第 1 拡張漸化式すなわち土倉・堀口法

$$x_{n+1}^{q}=x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6.13}$$

になる．

証　明

$$g'(x)=qx^{q-1}-k\frac{f'(x)f^{(q)}(x)-f(x)f^{(q+1)}(x)}{(f^{(q)}(x))^2} \tag{6.14}$$

$$\therefore\qquad g'(\alpha)=q\alpha^{q-1}-k\frac{f'(\alpha)f^{(q)}(\alpha)}{(f^{(q)}(\alpha))^2} \tag{6.15}$$

$$=q\alpha^{q-1}-k\frac{f'(\alpha)}{f^{(q)}(\alpha)} \tag{6.16}$$

ここで条件(6.11)より $g'(\alpha)=0$ となる．仮定より $g'(x)$ は連続であるから，$x=\alpha$ の近傍で $|g'(x)|<1$ となる．したがって $g(x)$ は縮小写像となる．条件(6.11)から

$$qx^{q-1}\frac{f(x)}{f'(x)}=k\frac{f(x)}{f^{(q)}(x)} \tag{6.17}$$

が導かれるから，村瀬・ニュートンの第 2 拡張漸化式は土倉・堀口法となる．　□

例 6.7　$f^{(q)}(x_n)$ を $f^{(q)}(x_n)_{,m}$ とする．炉縁の方程式

$$f(x)=x^3-14x^2+48=0 \tag{6.18}$$

のとき村瀬・ニュートン型の第 2 拡張漸化式は次式となる．

$$x_{n+1}^{2}=x_n^2-k\frac{x_n^3-14x_n^2+48}{mx_n-28} \tag{6.19}$$

$$g(x)=x^2-k\frac{x^3-14x^2+48}{mx-28} \tag{6.20}$$

が縮小写像となる条件は，(6.11)より

$$2x=k\frac{3x^2-28x}{mx-28} \tag{6.21}$$

である．これを解いて $k=2, m=3$ を得る．したがって(6.19)は

$$x_{n+1}^{2}=x_n^2-2\frac{x_n^3-14x_n^2+48}{3x_n-28} \tag{6.22}$$

となる．これは TH 法

$$x_{n+1}^2=x_n^2-2x_n\frac{x_n^3-14x_n^2+48}{3x_n^2-28x_n} \tag{6.23}$$

に等しい．村瀬は漸化式(1.3)，(1.4)を計算して，(1.4)の方が収束が速いことを知っている．さらにこの延長として縮小写像のときの収束の速い漸化式(6.23)が得られるのである．

定理 6.6 と同様な証明方法で次の定理の十分条件 $k=1$ を得る．

定理 6.8 $f(\alpha)=0$ とする．

$$g(x)=x^q-q\,x^{q-1}k\frac{f(x)}{f'(x)}\ (k\text{ は0でない実数定数}) \tag{6.24}$$

は C^i 級とする．このとき $k=1$ なら $g(x)$ は α の近傍で縮小写像となり，シュレーダー型の拡張漸化式は土倉・堀口法になる．

7．村瀬義益・ニュートン型の第1〜第3拡張漸化式の収束

定理 7.1（土倉 保）数列 $\{x_n\}$ において $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ とする．自然数 i を任意に与える．n が十分大きいとき，定数 $A, B(A<B)$ が存在して

$$|x_n-\alpha|\le\frac{1}{A}|x_n^i-\alpha^i|\ (i=2,3,\cdots) \tag{7.1}$$

$$|x_n^i-\alpha^i|\le B|x_n-\alpha| \tag{7.2}$$

となる．すなわち $\{x_n\}$ が α を近似するオーダーと $\{x_n^i\}$ が α^i を近似するオーダーは同一である．

$f(x)=(x-\alpha)^m h(x)$ (m:自然数), $h(\alpha)\neq 0$ とする．ここで $m=1$ のとき $f(x)=0$ は単根，$m\ge 2$ のときは m 重根となる．単根のとき $f'(\alpha)=h(\alpha)\neq 0$，$m$ 重根のとき $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$ となる．

A．村瀬義益・ニュートン型の第1拡張漸化式(土倉・堀口法)の収束

定理 7.2 ニュートン法

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7.3}$$

は α が単根のとき

$$|x_{n+1}-\alpha|\le M|x_n-\alpha|^2 \tag{7.4}$$

となる．すなわち2次収束する．α が m 重根のとき

$$|x_{n+1}-\alpha|\le\left(1-\frac{1}{m}\right)|x_n-\alpha| \tag{7.5}$$

となる．すなわち1次収束する．

定理 7.3 q を2以上の整数定数，M を正の定数とする．TH 法(土倉・堀口法)

$$x_{n+1}^q = x_n^q - q x_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7.6}$$

は, α が単根のとき 2 次収束 $\quad |x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M |x_n - \alpha|^2 \qquad (7.7)$

となる. α が m 重根のとき

$$M = (1 - \frac{1}{m}) |q\alpha^{q-1}| < 1 \tag{7.8}$$

なら 1 次収束 $\quad |x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M |x_n - \alpha| \qquad (7.9)$

となる.

証　明　$y = f(x)$ を C^i $(i \geq 1)$ 級とする. $x^q = t$ とおくと $x = t^{1/q}$ となる.

$$g(t) = f(t^{1/q}) = f(x) \tag{7.10}$$

とすると $g(t)$ もC^i 級となる. $f(\alpha)=0$ であるから $g(\alpha^q)=0$ となり, α が $f(x)=0$ の単根(重根)ならば α^q は $g(t)=0$ の単根(重根)になる. したがって $g(t)=0$ のときのニュートン法は

α^q が単根のとき 2 次収束し,

$$|t_{n+1} - \alpha^q| < M |t_n - \alpha^q|^2 \ (M > 0) \tag{7.11}$$

となる. この不等式を x で表すと次の不等式になる.

$$\begin{aligned} |x_{n+1}^q - \alpha^q| &< M |x_n^q - \alpha^q|^2 \\ &< M |x_n^{q-1} + x_n^{q-2}\alpha + \cdots + x_n\alpha^{q-2} + \alpha^{q-1}| |x_n - \alpha|^2 \end{aligned} \tag{7.12}$$

ここで $M |x_n^{q-1} + x_n^{q-2}\alpha + \cdots + x_n\alpha^{q-2} + \alpha^{q-1}|$ を新たに M に置き換えればよい.

α^q が m 重根のとき $\quad |t_{n+1} - \alpha^q| < (1 - \frac{1}{m}) |t_n - \alpha^q| \qquad (7.13)$

すなわち

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| < (1 - \frac{1}{m}) |x_n^{q-1} + x_n^{q-2}\alpha + \cdots + x_n\alpha^{q-2} + \alpha^{q-1}| |x_n - \alpha| \tag{7.14}$$

となる. ここで x_n は十分 α に近いから $x_n \fallingdotseq \alpha$ となり

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| < (1 - \frac{1}{m}) |q\alpha^{q-1}| |x_n - \alpha| \tag{7.15}$$

となる. したがって $(1 - 1/m)|q\alpha^{q-1}| < 1$ のとき TH 法は 1 次収束する. □

注意　7.4　条件(7.8)およびこのあと出てくる条件(7.21)は方程式の解 α が 0 の近傍にあるときしか使えないという難点がある. これを克服するには次のようにすればよい. 何らかの方法で(例えば関数 $y=f(x)$のグラフをコンピュータに描かせるような方法で),およその α の値を求め, この近傍で $q(d-c)^{q-1} < 1$ を満たすようなある区間 $c < x < d$ を選んで x の代わりに $x' = x - (c+d)/2$ を新しい変数としてとればよい.

定理 7.1 と 7.3 より次の命題を得る.

命題 7.5 漸化式

$$x_{n+1}=\left(x_n^q-q\,x_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{7.16}$$

は土倉・堀口法と同じオーダーで収束する.

B. 村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式の収束

ここのBと次のCにおいて (7.17) は次の 1 次収束を示す番号である.

$$|x_{n+1}^q-\alpha^q|\leq M\,|x_n-\alpha|\,(0<M<1) \tag{7.17}$$

定理 7.6 $f(\alpha)=0$ とする. k を 0 でない実数とする. 村瀬・ニュートン型の第 2 拡張漸化式

$$x_{n+1}^q=x_n^q-k\frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)}\,(q=1,2,\cdots) \tag{7.18}$$

は($x_n\to\alpha$ のとき)

$$\left|q\alpha^{q-1}-k\frac{f'(\alpha)}{f^{(q)}(\alpha)}\right|<1 \tag{7.19}$$

を満たせば(7.17)の 1 次収束をする.

証明概略 $h(x_n)=f(x_n)/f^{(q)}(x_n)$ とおき Taylor の定理を適用する.

注意 7.7 条件(7.19)の絶対値の中の式から定理 6.6 の条件(6.11)が得られる.

定理 7.8 α を $f(x)=0$ の $k(\neq 1)$ 重根とする. このとき村瀬・ニュートン型の第2 拡張漸化式

$$x_{n+1}^q=x_n^q-k\frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)}\,(q=2,3,\cdots) \tag{7.20}$$

は($x_n\to\alpha$ のとき)

$$q\,|\alpha|^{q-1}<1 \tag{7.21}$$

を満たせば(7.17)の 1 次収束をする.

証明概略 $f(x)=(x-\alpha)^k h(x)$, $h(\alpha)\neq 0$ とする. $f(x)$の q 次導関数は

$$\begin{aligned}f^{(q)}(x)=&a_0(x-\alpha)^{k-q}h(x)+a_1(x-\alpha)^{k-(q-1)}h'(x)+a_2(x-\alpha)^{k-(q-2)}h''(x)\\&+a_3(x-\alpha)^{k-(q-3)}h'''(x)+\cdots+a_{q-1}(x-\alpha)^{k-(q-(q-1))}h^{(q-1)}(x)+(x-\alpha)^k h^{(q)}(x)\end{aligned}$$

となる. 次に $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{|x^q-kf(x)/f^{(q)}(x)-\alpha^q|}{|x-\alpha|}$ を求める.

定理 7.8 の漸化式(7.20)は $q=1$ のときシュレーダー法となり, つぎの定理 7.9 のように 2 次収束する.

C. 村瀬義益・ニュートン型の第 3 拡張漸化式(シュレーダー型の拡張漸化式)の収束

定理 7.9 シュレーダー法(1870)　$$x_{n+1}=x_n-k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7.22}$$

は k 重根に2次収束する[3].

定理 7.10 $f(\alpha)=0$ とする. k を0でない実数とする. シュレーダー型の拡張漸化式

$$x_{n+1}^q=x_n^q-q\,x_n^{q-1}k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(q=1,2,\cdots) \tag{7.23}$$

は ($x_n\to\alpha$ とするとき)

$$q|\alpha^{q-1}(1-k)|<1 \tag{7.24}$$

を満たせば, (7.17)の1次収束をする.

証明概略　$h(x_n)=f(x_n)/f'(x_n)$ とおき Taylor の定理を適用する. 次に

$$\lim_{n\to\infty}|x_n^q-qx_n^{q-1}k\,f(x_n)/f'(x_n)-\alpha^q|/|x_n-\alpha|$$

を求める.

定理 7.11 $f(x)=0$ のk重零点を α とする. このときシュレーダー型の拡張漸化式

$$x_{n+1}^q=x_n^q-q\,x_n^{q-1}k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7.25}$$

は ($x_n\to\alpha$ とするとき) (7.17)の1次収束をする.

証明概略　$f(x)=(x-\alpha)^k h(x)$, $h(\alpha)\neq 0$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}^q-\alpha^q|/|x_n-\alpha|=0$$

となる.

謝 辞　東北大学名誉教授 土倉保氏および日本大学名誉教授 山中健氏からご助言を頂きました. ここに厚く御礼申し上げます.

参 考 文 献

[1] 村瀬義益著・西田知己校注:『算法勿憚改』, 研成社 , 1993
[2] 鈴木武雄:『和算の成立』, 恒星社厚生閣, 2007.7
[3] 長田直樹:お話:数値解析第 10 回　非線型方程式(前編)
http://www.cis.twcu.ac.jp/~osada/rikei/rikei2009-03.pdf
[4] 森正武・室田一雄・杉原正顕:『数値計算の基礎』, 岩波書店, 1993. 5
[5] 永坂秀子:『計算機と数値解析』, 朝倉書店, 1980.3
[6] 戸川隼人:『数値計算法』, コロナ社, 1981.1
[7] 藤野清次:『数値計算の基礎』, サイエンス社, 1998.2
[8] 山本哲朗:『数値解析入門[増訂版]』, サイエンス社, 1976.10
[9] 伊理正夫:『数値計算』, 朝倉書店, 1981.12